C1592

DURÉE: 4 HEURES

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail

Exercice I

L'Insee a collecté le nombre des entreprises - Hôtels, restaurants et cafés - qui ont fait faillite sur la période de janvier 1996 à juin 2000. On date la faillite au jour du jugement et on regroupe ces données par trimestre.

Années \ Trimestres	1er	2ème	3ème	4ème
1996	1016	1132	1203	927
1997	1063	1367	1331	1055
1998	1301	1515	1614	1226
1999	1463	1701	1739	1293
2000	1447	1634		

1. Le modèle est-il additif ou multiplicatif ? Représenter la série graphiquement.

Tournez la page S.V.P.

2. Calculer la tendance T_1, que l'on suppose linéaire, analytiquement par la méthode des moindres carrés.

3. Calculer la tendance T_2 par la méthode des moyennes mobiles d'ordre 4.

4. Etablir la série corrigée des variables saisonnières que l'on note y^* par la méthode des moyennes mobiles d'ordre 4.

5. Prévoir le nombre de faillites pour les trimestres 3 et 4 de l'année 2000.

6. Tracer sur un même graphe la série observée y, ainsi que T_1, T_2, y^* et les deux valeurs prédites.

Exercice II

1. (a) Représenter graphiquement le problème suivant :

$$\max\{2x + y \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 4\}.$$

   (b) Résoudre ce problème analytiquement.

2. On admet le résultat suivant

Théorème :
Soient m et $n \in \mathbb{N}^*$ et $(b_j)_{j=1,\cdots,m}$ un m-uplet de réels. Soient les fonctions f, g_j pour $j = 1, \cdots, m$, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, continuement différentiables.
Si $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$, où

$$(\mathcal{P}) \quad \max\{f(x_1, \cdots, x_n) \ / \ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ g_j(x_1, \cdots, x_n) \leq b_j, j = 1, \cdots, m\}$$

alors il existe un vecteur $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ tel que le couple (x^*, λ^*) satisfait les relations :

$$\lambda_0^* \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$
$$\lambda^* \neq (0, \cdots, 0)$$
$$\lambda_j^* \geq 0, \quad j = 0, \cdots, m$$
$$\lambda_j^*(b_j - g_j(x^*)) = 0, \quad j = 1, \cdots, m$$

En appliquant ce théorème, proposer des solutions vérifiant ces conditions nécessaires pour les deux problèmes suivant :

(a)
$$\max\{x^2 + y^2 \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(b)
$$\max\{x^2 + y^2 \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ 2x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Problème I

Dans tout le problème, les variables sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour n et k entiers tels que $n \geq k$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k objets pris parmi n.

Question 1:

On considère n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p:

$$P[Y_i = 1] = p, \quad P[Y_i = 0] = 1 - p, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Donner la loi, l'espérance et la variance de S_n.

Question 2:

On considère $2n+1$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{2n+1}$ indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$ on définit les variables $Y_i, 1 \leq i \leq 2n+1$ et S_{2n+1} telles que

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X_i \leq x, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Y_i.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$ on réordonne les $X_i(\omega)$ par ordre croissant. On définit ainsi des variables $(X_{(i)})_{1 \leq i \leq 2n+1}$ telles que $\forall \omega \in \Omega$,

$$X_{(1)}(\omega) = \min_{1 \leq i \leq 2n+1} X_i(\omega) \leq X_{(2)}(\omega) \leq \ldots \leq X_{(n+1)}(\omega) \leq \ldots \leq X_{(2n+1)}(\omega) = \max_{1 \leq i \leq 2n+1} X_i(\omega).$$

On note $M_n = X_{(n+1)}$ la variable médiane de la suite X_i.

(a) Montrer que pour tout entier $N > 0$, et pour $i \neq j$,

$$P\left[|X_i - X_j| > \frac{1}{N}\right] = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2.$$

Remarquer que $P\left[|X_i - X_j| = 0\right] < P\left[|X_i - X_j| \leq \frac{1}{N}\right]$ et en déduire que $P[X_i = X_j] = 0$ pour $i \neq j$.

(b) Déterminer les lois des variables $X_{(1)}$ et $X_{(2n+1)}$.

(c) Montrer que $[M_n \leq x] = [S_{2n+1} \geq n+1]$. En déduire une expression de $P[M_n \leq x]$ sous forme d'une somme.

(d) Déterminer la loi des variables $X_i' = 1 - X_i$ et montrer que les variables médianes des suites (X_i) et (X_i') sont reliées par $M_n' = 1 - M_n$. En déduire que $E(M_n) = \frac{1}{2}$.

(e) On définit, pour tous entiers k, m, l'intégrale

$$I_{k,m} = \int_0^1 x^k (1-x)^m dx.$$

Etablir une relation entre $I_{k,m}$ et $I_{k-1,m+1}$, pour $k > 0$ et $m \geq 0$ (on pourra utiliser la formule d'intégration par parties $\int u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)] - \int u'(x)v(x)dx$).

En déduire la valeur de $I_{k,m}$.

Retrouver par le calcul la valeur de $E(M_n)$ en utilisant la relation (que l'on pourra admettre) $E(M_n) = \int_0^1 P[M_n > x]dx$.

(f) **Dans cette question x est un réel fixé appartenant à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$.**
Pour $k = 0, \ldots, 2n+1$, on pose

$$v_k = \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}.$$

Montrer en calculant le rapport $\frac{v_{k+1}}{v_k}$, que

$$v_{n+1} = \max_{n+1 \leq k \leq 2n+1} v_k.$$

En déduire que

$$P[M_n \leq x] \leq u_n(x) = (n+1)\binom{2n+1}{n} x^{n+1}(1-x)^n.$$

Montrer que

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lambda(x) w_n$$

où $\lambda(x) < 1$ et (w_n) est une suite convergeant vers 1. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} P[M_n \leq x] = 0.$$

Montrer en utilisant la question d) que $\lim_{n\to\infty} P[M_n \geq 1 - x] = 0$.